

# MODELAÇÃO DA LIGAÇÃO DE LAMINADOS DE CFRP INSERIDOS NO BETÃO

José M. Sena Cruz<sup>1</sup> e Joaquim A. O. Barros<sup>2</sup>

## RESUMO

A técnica de reforço de estruturas de betão armado baseada na inserção de laminados de fibras de carbono (CFRP) no betão de recobrimento dos elementos a reforçar tem vindo a ser investigada. Ensaios efectuados sobre pilares e vigas revelaram que esta técnica permite mobilizar quase toda a capacidade de reforço dos laminados de CFRP. A simulação numérica do reforço proporcionado por estes materiais compósitos passa pelo conhecimento da lei que relaciona a tensão de corte com o deslizamento na interface laminado-betão,  $\tau$ - $s$ . No presente trabalho apresenta-se a metodologia adoptada para a calibração dos parâmetros intervenientes na lei  $\tau$ - $s$ . O modelo tem em conta a distribuição das tensões de corte e deslizamento ao longo do comprimento de aderência. Como exemplo de aplicação, é apresentada uma lei analítica  $\tau$ - $s$  cuja calibração efectuou-se por intermédio de resultados experimentais e do método utilizado.

## 1. INTRODUÇÃO

Nos últimos anos têm sido investigada uma técnica de reforço baseada na fixação de laminados de CFRP em ranhuras efectuadas no betão de recobrimento dos elementos a reforçar. Estes laminados têm secção transversal de aproximadamente  $10.0 \times 1.5 \text{ mm}^2$  e são fixos ao betão por intermédio de um adesivo epoxídico. Comparativamente com as técnicas de reforço que recorrem à fixação externa do laminado de CFRP (CEB-FIP, 2001), esta técnica apresenta as seguintes principais vantagens: maior mobilização da resistência à tracção destes materiais compósitos; maior protecção ao fogo e a actos de vandalismo; maior facilidade e rapidez de execução.

Com vista à detecção e interpretação dos mecanismos de fixação do laminado ao betão, Cruz e Barros (2002) efectuaram uma campanha de ensaios de arranque em flexão. A influência do comprimento de aderência do laminado e a classe de resistência do betão foram os parâmetros analisados. Com base nesta campanha foi possível constatar que, com o

---

<sup>1</sup> Assistente, Universidade do Minho, Departamento de Engenharia Civil, Guimarães.

<sup>2</sup> Professor Auxiliar, Universidade do Minho, Departamento de Engenharia Civil, Guimarães.

aumento do comprimento de aderência a força instalada no laminado, o deslizamento correspondente à força máxima e o rendimento do laminado aumentaram (Cruz e Barros, 2002). Também foi possível concluir que a distribuição das tensões de corte ao longo do comprimento de aderência é essencialmente não linear. Contudo, a impossibilidade física de se aplicar instrumentação ao longo da zona de aderência, não permitiu registar, de forma directa, a evolução das deformações nesta zona.

A adequada simulação do reforço proporcionado por estes materiais compósitos passa pelo conhecimento da relação entre a tensão de corte e o deslizamento laminado-betão ( $\tau$ - $s$ ). Esta relação pode ser usada como lei constitutiva em elementos de interface dispostos na transição entre o laminado e o betão, de forma a modelar o comportamento desta zona.

No presente trabalho apresenta-se uma metodologia para a calibração dos parâmetros definidores da lei  $\tau$ - $s$  com recurso a resultados experimentais. O método baseia-se no conhecimento da equação diferencial regente do fenómeno e tem em conta a distribuição das tensões de corte e deslizamento ao longo do comprimento de aderência. O estudo efectuado para a determinação da lei  $\tau$ - $s$  é apresentado, assim como um exemplo de aplicação.

## 2. EQUAÇÃO DIFERENCIAL REGENTE DO FENÓMENO

O equilíbrio de um laminado de comprimento  $dx$  inserido no betão de recobrimento pode ser traduzido pela equação (1), desde que se admita que o laminado tem comportamento linear elástico e seja desprezada a sua espessura para efeitos de equilíbrio (ver Figura 1).

$$\tau(x) = \frac{E_f \times t_f}{2} \times \frac{d\varepsilon_f}{dx} \quad (1)$$

em que  $\tau(x)$  é a tensão de corte na superfície de contacto entre o laminado e o adesivo,  $E_f$  é o módulo de elasticidade do laminado,  $t_f$  é a espessura do laminado e  $\varepsilon_f$  é a deformação do laminado.

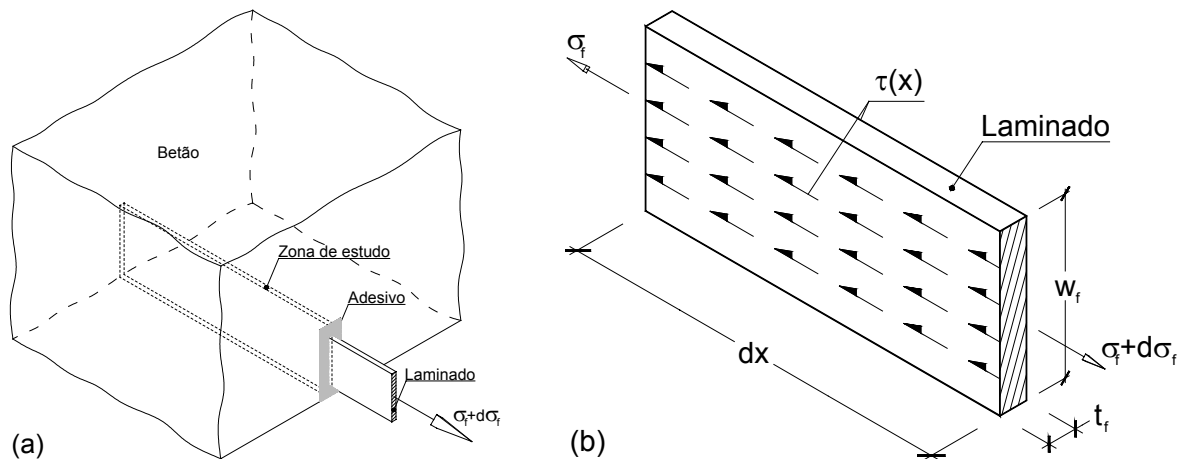


Fig. 1 – (a) Zona de estudo; (b) Condições de equilíbrio do laminado.

Na Figura 2 representam-se as deformações observadas no betão, adesivo e laminado para o comprimento  $dx$ . Se a contribuição da deformação do betão e do adesivo for desprezada na avaliação do deslizamento, verifica-se que a relação entre a variação de deslizamento,  $ds$ , e a deformação no laminado é dada por:

$$\varepsilon_f = \frac{ds}{dx} \quad (2)$$

Substituindo em (1) a equação (2) é possível obter a equação diferencial que rege o fenómeno do deslizamento de laminados inseridos no betão de recobrimento, isto é:

$$\frac{d^2s}{dx^2} = \frac{2}{t_f \times E_f} \times \tau(s) \quad (3)$$

Com recurso à equação diferencial (3) é possível simular diversos fenómenos de importância relevante no betão armado, tais como: determinação do comprimento de ancoragem; *tension stiffening* (Barros, 1995); distância entre fendas; largura de fendas. Para tal é necessário que a lei local da tensão de corte *versus* deslizamento,  $\tau(s)$ , apresente rigor suficiente.

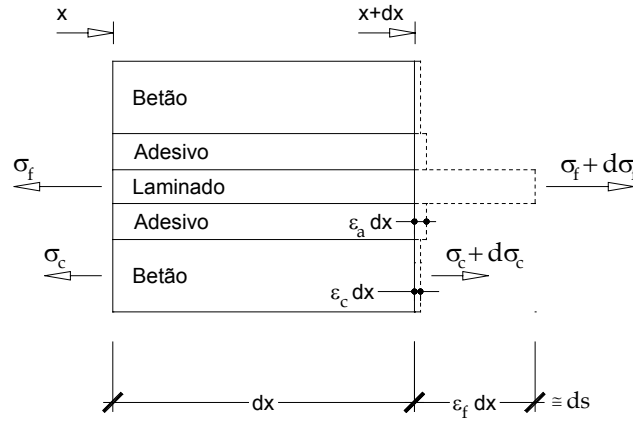


Fig. 2 – Deformação observada no betão, adesivo e laminado.

### 3. MODELO PARA A DETERMINAÇÃO DA LEI $\tau$ - $s$

O método adoptado para a determinação da lei local tensão de corte *vs* deslizamento teve como base o trabalho desenvolvido por Focacci *et al.* (2000). Contudo, o método utilizado por estes autores foi adaptado de forma a satisfazer a especificidade do problema em causa. Nas secções que se seguem é descrito, com pormenor, o método adoptado.

#### 3.1 Expressões analíticas para a relação tensão de corte *versus* deslizamento

Diversos investigadores têm apresentado propostas para a definição da lei local da tensão de corte *vs* deslizamento em varões de FRP (Larralde *et al.*, 1993; Malvar, 1995; Cosenza *et al.*, 1997; Focacci *et al.*, 2000; De Lorenzis *et al.*, 2003) tendo como base as propostas para varões de aço. Por vezes, observa-se a necessidade de se proceder à correcção das leis propostas para varões de aço por forma a reproduzir, de forma mais correcta, o comportamento observado experimentalmente com reforços de FRP (Cosenza *et al.*, 1995; Focacci *et al.*, 2000), isto é, elevada rigidez inicial.

Neste trabalho propõe-se a utilização de uma lei, definida de acordo com a equação (4), constituída por dois ramos: o primeiro, ascendente, que coincide com a proposta de Elgehausen *et al.* (1983); o segundo, descendente, coincidente com a proposta de De

Lorenzis *et al.* (2003). A escolha desta lei está relacionada com o facto de ser uma lei simples e adequada à simulação deste tipo de ensaios.

$$\tau(s) = \begin{cases} \tau_m \times \left( \frac{s}{s_m} \right)^\alpha & \text{se } s \leq s_m \\ \tau_m \times \left( \frac{s}{s_m} \right)^{-\alpha'} & \text{se } s > s_m \end{cases} \quad (4)$$

em que  $\tau_m$  e  $s_m$  são a tensão de pico e o deslizamento correspondente, e  $\alpha$  e  $\alpha'$  são parâmetros a determinar que definem a forma da curva.

### 3.2 Notação adoptada

Considere-se um elemento de betão, sobre o qual, num comprimento  $L_{em}$ , se aderiu um laminado, como se ilustra na Figura 3. Se o laminado estiver sujeito a uma força de arranque,  $\bar{N}$ , que provoque deslizamento do laminado, isto é, deslocamento relativo do laminado em relação ao betão, podem ser definidas as funções que, ao longo da zona de aderência, fornecem as seguintes grandezas: deslizamento,  $s = s(x)$ ; tensão de corte entre o adesivo e o laminado,  $\tau = \tau(x)$ ; deformação no laminado,  $\varepsilon = \varepsilon_f(x)$ ; esforço axial no laminado,  $N = N(x)$ . No caso particular do final da zona livre e carregada (ver Fig. 3) é possível constatar que:

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} s = s_f \\ N = 0 \\ \varepsilon_f = 0 \end{cases} ; \quad x = L_{em} \Rightarrow \begin{cases} s = s_l \\ N = \bar{N} \\ \varepsilon_f = \bar{N} / (E_f \times A_f) \end{cases} \quad (5)$$

em que  $s_f$  e  $s_l$  são os deslizamentos no final da zona livre e carregada, respectivamente.

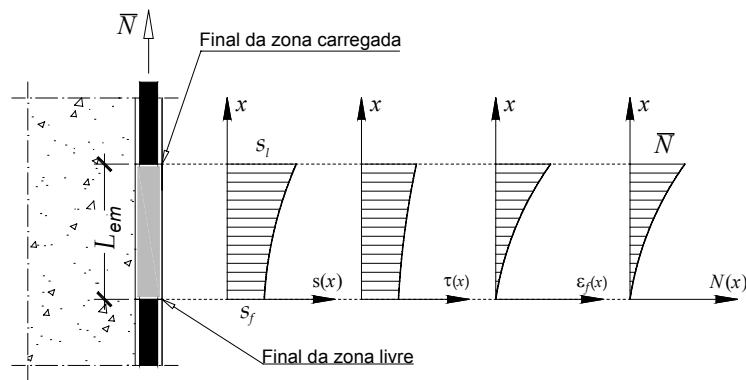


Fig. 3 – Funções envolvidas.

Ao longo deste trabalho será necessário envolver grandezas numéricas e experimentais. Para as diferenciar, as grandezas experimentais serão sublinhadas superiormente. A título exemplificativo a variável  $\bar{N}_i$  representa a força de arranque medida experimentalmente, no passo de leitura  $i$ .

### 3.3 Resolução da equação diferencial de 2ª ordem

A aplicação do método que será descrito na secção 3.4 requer a resolução da equação diferencial de 2ª ordem (3). Para tal, recorreu-se ao método numérico de resolução de equações diferenciais de 2ª ordem de Runge-Kutta-Nyström - RKN - (Kreyszig, 1993). Na Figura 4 apresenta-se, de forma esquemática, a adaptação do método RKN ao problema em causa. Assim, para que as funções  $s = s(x)$  e  $s' = s'(x)$  sejam determinadas ao longo de um intervalo  $[x_0 = 0, x_n = L]$ , utilizando a equação (3), é necessário saber os valores  $s(x_0)$  e  $s'(x_0)$ . O intervalo  $[0, L]$  foi dividido sempre em 100 partes iguais, isto é,  $n = 100$ . Nos casos correntes, o objectivo foi obter os resultados no final do intervalo, isto é, para  $x_n = L$ . Contudo, o método permitir obter resultados ao longo do intervalo.

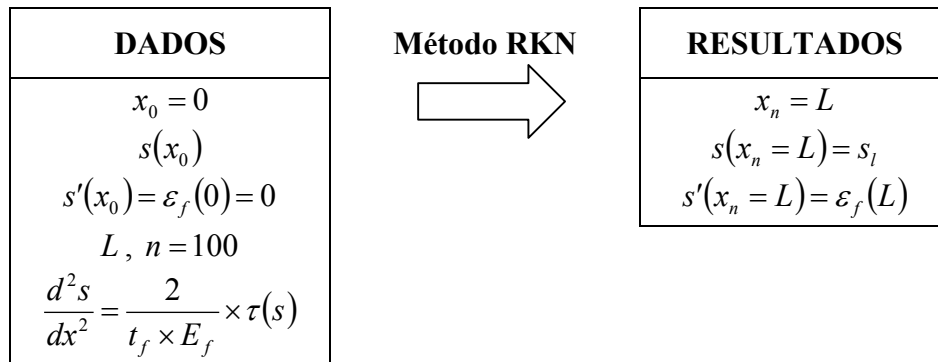


Fig. 4 – Método RKN (Nota:  $s'(x) = ds/dx$ ).

### 3.4 Descrição do método

Admita-se que se dispõe de um conjunto de dados experimentais referentes a um ensaio de arrancamento, isto é, o registo ao longo do ensaio dos valores do deslizamento no final da zona livre, no final da zona carregada e a correspondente força de arranque. No caso particular do registo  $i$ , seriam conhecidos os valores de  $\bar{s}_f^i$ ,  $\bar{s}_l^i$  e  $\bar{N}_i$ .

Com base neste conjunto de dados experimentais pretende-se determinar quais os parâmetros  $s_m$ ,  $\tau_m$ ,  $\alpha$  e  $\alpha'$  da equação (4) que melhor satisfazem a equação diferencial (3). Para tal desenvolveu-se um código computacional que a seguir se descreve com mais detalhe. Na Figura 5 apresentam-se os algoritmos implementados no código computacional. Os principais aspectos a reter são os seguintes:

- *Fixação da lei de aderência*: numa primeira fase começa-se por fixar os parâmetros  $s_m$ ,  $\tau_m$ ,  $\alpha$  e  $\alpha'$  de modo a definir a lei  $\tau$ - $s$ , para a qual se vai determinar o erro associado;
- *Determinação do parâmetro  $\tilde{s}_l$* : determinação do máximo do deslizamento no final da zona carregada sem que se observe deslizamento no final da zona livre (ver *Módulo A*);
- *Leitura dos valores experimentais*: para o registo experimental  $i$ , utilizaram-se os valores do deslizamento no final da zona livre,  $\bar{s}_f^i$ , do deslizamento no final da zona carregada  $\bar{s}_l^i$ , e da força de arranque associada,  $\bar{N}_i$ ;
- *Determinação da força de arranque  $N_i(\bar{s}_f^i)$* : com base no conhecimento do deslizamento no final da zona livre,  $\bar{s}_f^i$ , e recorrendo à equação (3) determina-se a força de arranque no final da zona carregada,  $N_i(\bar{s}_f^i)$  (ver *Módulo B*);

- *Determinação do erro associado a  $N_i(\bar{s}_f^i)$* : a estimativa do erro efectua-se por intermédio da mediação da diferença de áreas, em valor absoluto, entre a curva teórica e a curva experimental. Para a definição da curva teórica utilizam-se os pontos  $(\bar{s}_f^{i-1}; N_{i-1}(\bar{s}_f^{i-1}))$  e  $(\bar{s}_f^i; N_i(\bar{s}_f^i))$ , enquanto que na definição da curva experimental utilizam-se os pontos  $(\bar{s}_f^{i-1}; \bar{N}_{i-1})$  e  $(\bar{s}_f^i; \bar{N}_i)$ ;

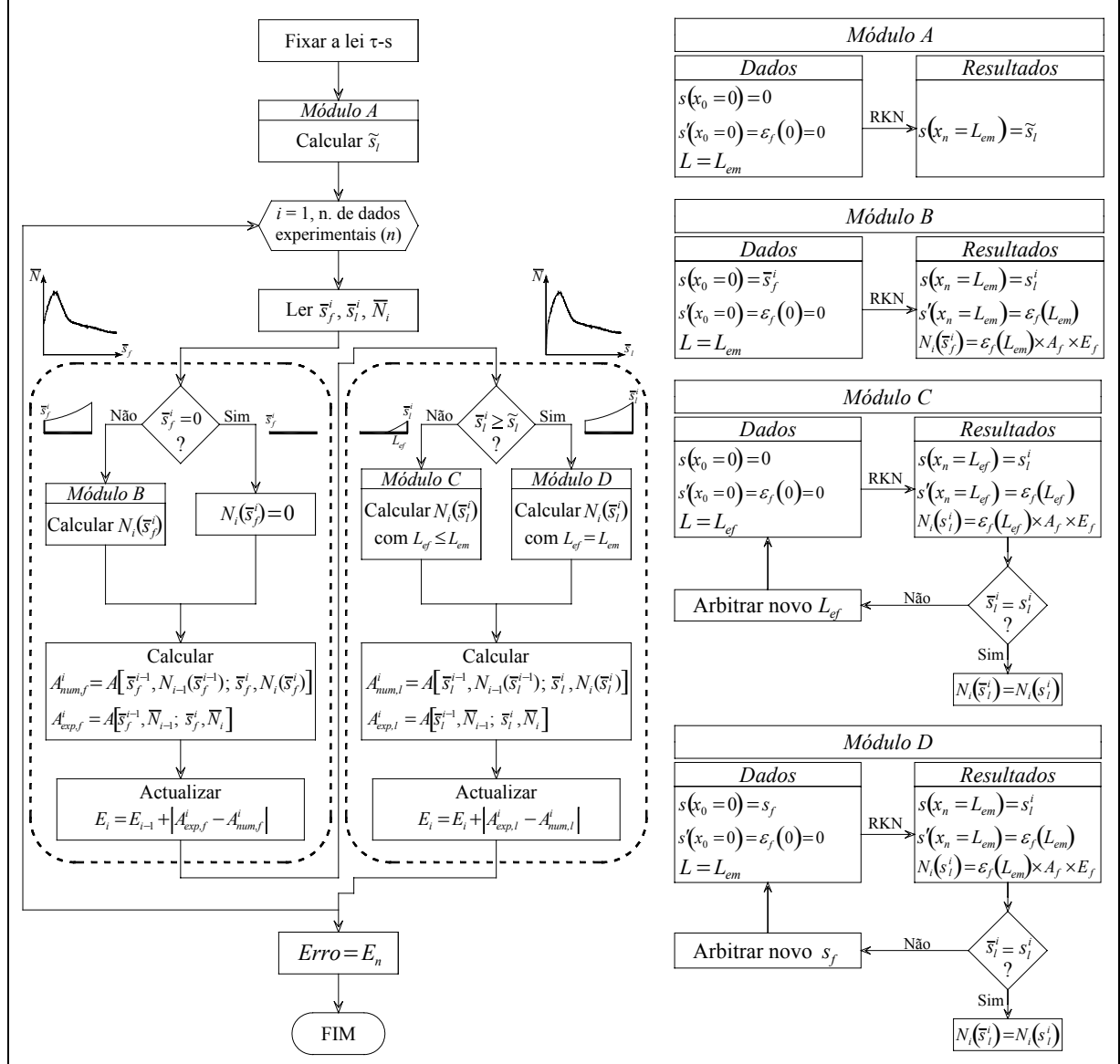


Fig. 5 – Algoritmo utilizado.

- *Determinação da força de arranque  $N_i(\bar{s}_l^i)$* : com base no conhecimento do deslizamento no final da zona carregada,  $\bar{s}_l^i$ , e recorrendo à equação (3) determina-se a força de arranque no final da zona carregada,  $N_i(\bar{s}_l^i)$ . Contudo, para este caso é necessário verificar se  $\bar{s}_l^i \leq \tilde{s}_l$ . No caso de o deslizamento  $\bar{s}_l^i$  não exceder  $\tilde{s}_l$ , a determinação de  $N_i(\bar{s}_l^i)$  terá de ter em conta que nem toda a zona de aderência se encontra efectiva (ver *Módulo C*). No caso de o deslizamento  $\bar{s}_l^i$  exceder  $\tilde{s}_l$ , a determinação de  $N_i(\bar{s}_l^i)$  processa-se de acordo com o referido no *Módulo D*;

- *Determinação do erro associado a  $N_i(\bar{s}_l^i)$* : a estimativa do erro efectua-se por intermédio da mediação da diferença de áreas, em valor absoluto, entre a curva teórica e a curva experimental. Para a definição da curva teórica utilizam-se os pontos  $(\bar{s}_l^{i-1}, N_{i-1}(\bar{s}_l^{i-1}))$  e  $(\bar{s}_l^i, N_i(\bar{s}_l^i))$ , enquanto que na definição da curva experimental utilizam-se os pontos  $(\bar{s}_l^{i-1}, \bar{N}_{i-1})$  e  $(\bar{s}_l^i, \bar{N}_i)$ .

Referira-se que, quer o *Módulo C* quer o *Módulo D* conduzem a um processo iterativo. No presente trabalho foi adoptado o método das bissecções sucessivas para resolver esse processo iterativo. É de referir que o método é também aplicável a casos em que só existam resultados experimentais no final da zona livre ou no final da zona carregada.

#### 4. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

No que se segue apresenta-se um exemplo de aplicação do método descrito na secção anterior. Assim, seleccionou-se a viga *B2\_fcm45\_La80* resultante de uma campanha de ensaios de arranque em flexão realizados por Cruz e Barros (2002). Trata-se de um provete de betão com resistência média à compressão de 45MPa e com laminado com 80mm de comprimento de aderência ( $L_{em} = 80mm$ ).

Com base em medidas efectuadas e em ensaios realizados, verificou-se que  $t_f = 1.39mm$  e  $E_f = 160GPa$ . A aplicação do modelo consistiu, numa primeira fase, em fazer variar os valores de  $s_m$  e de  $\tau_m$ , mantendo fixos os valores de  $\alpha$  e de  $\alpha'$ , de modo que a força de arrancamento e correspondente deslizamento coincidissem com os valores obtidos experimentalmente a menos de uma tolerância de 1%. Numa segunda fase, mantendo constantes os valores de  $s_m$  e  $\tau_m$  (determinados na fase anterior), fez-se variar os valores de  $\alpha$  e de  $\alpha'$  de modo a obter o menor erro possível (calculado de acordo com o descrito na sessão 3.4). Por vezes, foi necessário iterar este procedimento de forma a garantir os critérios definidos.

Na Figura 6 apresentam-se os diagramas força de arrancamento vs deslizamento no final da zona livre e da zona carregada correspondentes aos resultados experimentais e aos obtidos pelo modelo teórico. Em ambos os gráficos é possível observar uma boa concordância. Na Figura 7 apresentam-se o campo de deslizamentos, o diagrama de tensões de corte e esforço axial no laminado ao longo do comprimento de aderência correspondentes à situação em que ocorre a força de arranque máxima. Como se pode observar, o comportamento da ligação ao longo do comprimento de aderência é essencialmente não linear. Aspecto interessante a salientar é que, mais de metade do comprimento de aderência encontra-se com tensões de corte que correspondem à fase de amolecimento da lei  $\tau$ - $s$ .

#### 5. DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS QUE DEFINEM A LEI $\tau$ - $s$

Com base na campanha de ensaios de arrancamento em flexão realizados por Cruz e Barros (2002), os parâmetros  $s_m$ ,  $\tau_m$ ,  $\alpha$  e  $\alpha'$  da lei  $\tau$ - $s$  foram determinados segundo o procedimento referido na secção 4. Para cada série (constituída por três provetes) utilizou-se a correspondente curva média (deslizamento no final da zona carregada e força média de arrancamento). Da Figura 8 à 10 apresenta-se a resposta teórica (traço grosso) e a respectiva envolvente experimental (trama). De uma forma geral, é possível constatar que a resposta teórica acompanha a envolvente dos resultados experimentais.

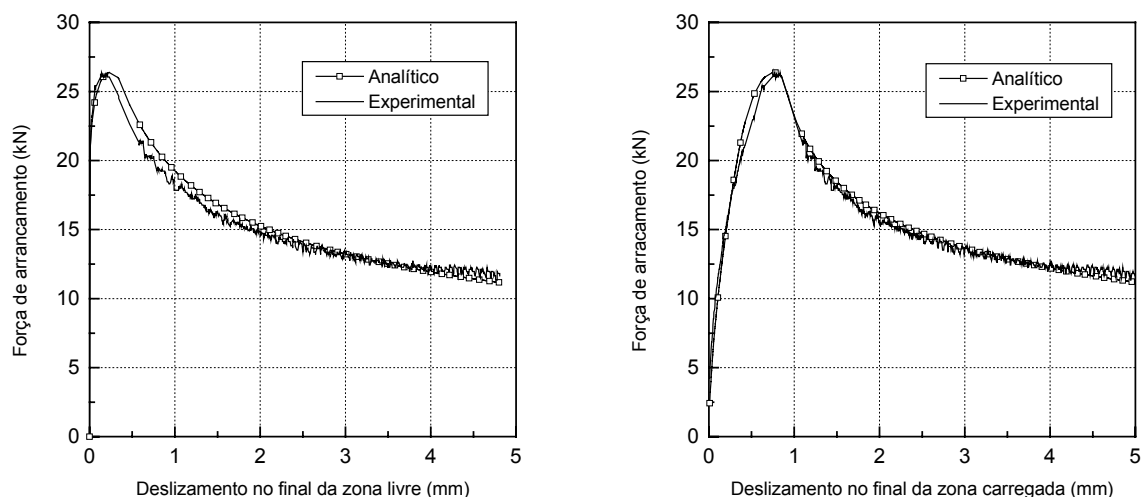


Fig. 6 – Resultados obtidos para a viga *B2\_fcm45\_La80*.

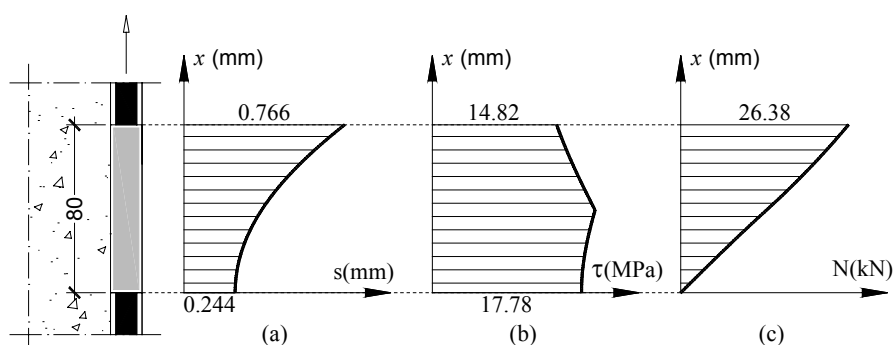


Fig. 7 – Campo de deslizamentos (a), diagrama de tensões de corte (b) e evolução do esforço axial no laminado (c) para a viga *B2\_fcm45\_La80*.

Na Tabela 1, para as séries analisadas, apresentam-se os valores obtidos dos parâmetros  $s_m$ ,  $\tau_m$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha'$  e o erro associado à calibração. O erro foi definido como sendo o somatório, em valor absoluto, das diferenças de áreas entre a curva experimental e a teórica dividido pela área da curva experimental. As principais conclusões a reter são: o valor do erro associado a cada série é aceitável; o valor da tensão máxima de corte é próximo do 20.0MPa; o deslizamento correspondente à tensão máxima de corte apresenta um coeficiente de variação considerável. É possível observar que  $s_m$  aumenta com o comprimento de ancoragem. A principal razão para estas duas observações efectuadas pretende-se com o facto de no modelo desenvolvido se ter desprezado a contribuição do adesivo para o deslizamento; os parâmetros  $\alpha$  e  $\alpha'$  apresentam, também, um coeficiente de variação com valor considerável. Durante o processo de calibração pôde-se constatar que estes parâmetros eram sensíveis a pequenas alterações dos valores de  $s_m$  e  $\tau_m$ .

## 6. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentada uma metodologia para a determinação dos parâmetros intervenientes na lei  $\tau$ - $s$  referente à interface laminado-adesivo de estruturas reforçadas com laminados de CFRP inseridos no betão de recobrimento. A calibração efectuou-se por intermédio de resultados experimentais, tendo-se obtido boa concordância entre o modelo analítico e o observado experimentalmente.



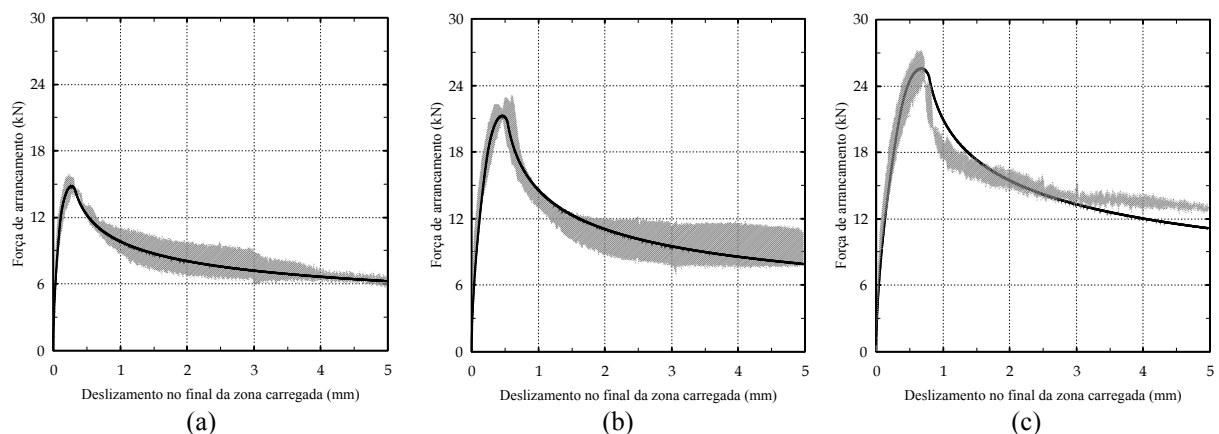


Fig. 8 – Diagramas deslizamento vs força de arrancamento para as séries *fcm35\_La40* (a), *fcm35\_La60* (b) e *fcm35\_La80* (c).

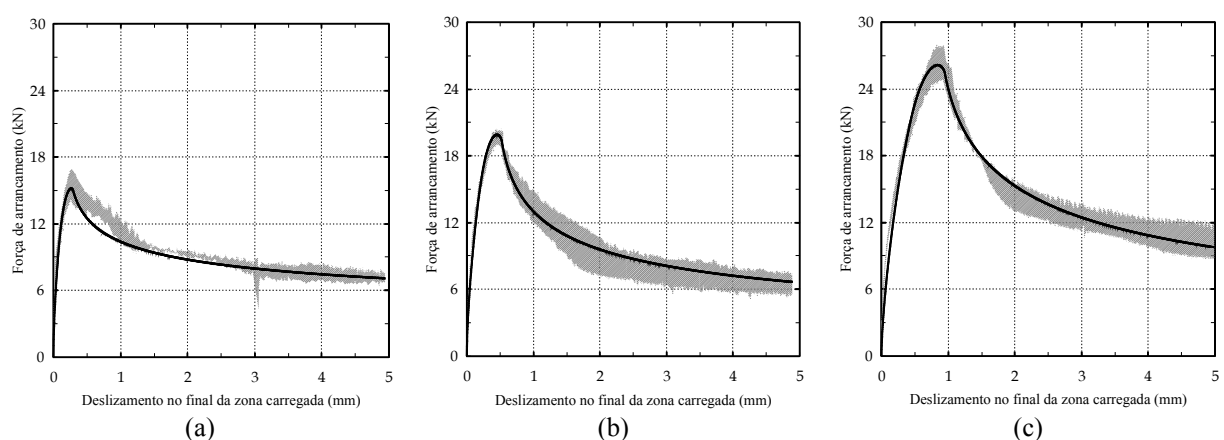


Fig. 9 – Diagramas deslizamento vs força de arrancamento para as séries *fcm45\_La40* (a), *fcm45\_La60* (b) e *fcm45\_La80* (c).

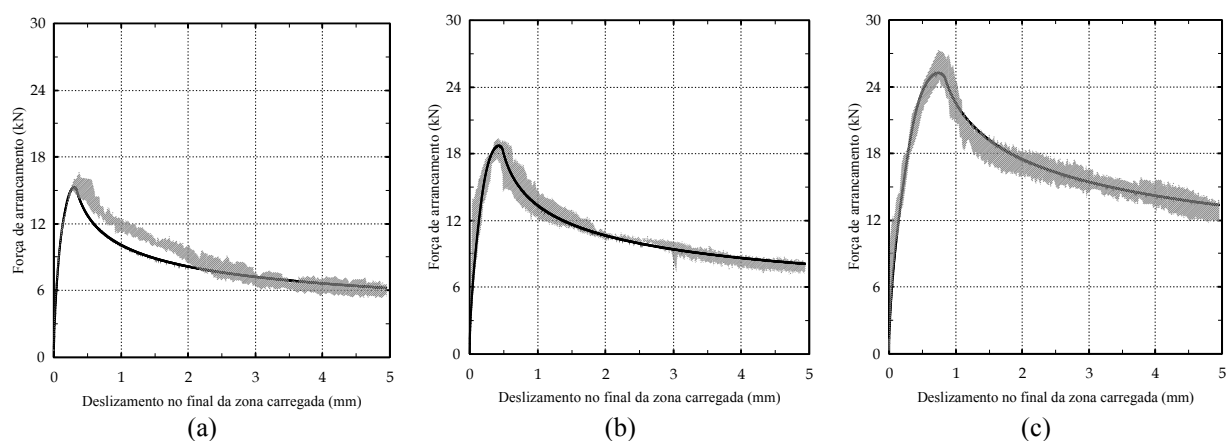


Fig. 10 – Diagramas deslizamento vs força de arrancamento para as séries *fcm70\_La40* (a), *fcm70\_La60* (b) e *fcm70\_La80* (c).

## AGRADECIMENTOS

Os autores deste trabalho agradecem ao Doutor Francesco Focacci pelo esclarecimentos prestados durante o desenvolvimento do modelo analítico.

Tabela 1 – Valores obtidos para os parâmetros definidores da lei  $\tau$ - $s$ .

Série	$s_m$ (mm)	$\tau_m$ (MPa)	$\alpha$	$\alpha'$	Erro (%)
<i>_fcm35_La40</i>	0.180	20.60	0.13	-0.27	2.04
<i>_fcm35_La60</i>	0.228	20.68	0.19	-0.35	5.92
<i>_fcm35_La80</i>	0.290	18.90	0.17	-0.33	6.96
<i>_fcm45_La40</i>	0.144	21.40	0.21	-0.23	4.66
<i>_fcm45_La60</i>	0.231	19.50	0.24	-0.39	2.98
<i>_fcm45_La80</i>	0.430	19.50	0.35	-0.45	2.75
<i>_fcm70_La40</i>	0.189	21.50	0.24	-0.29	7.82
<i>_fcm70_La60</i>	0.210	18.00	0.21	-0.29	3.37
<i>_fcm70_La80</i>	0.345	18.20	0.19	-0.27	2.36
Valor médio	0.250	19.81	0.21	-0.32	–
Coef. variação (%)	36.19	6.60	29.05	21.49	–

## REFERÊNCIAS

Barros, J.A.O., “Comportamento do betão reforçado com fibras - análise experimental e simulação numérica”, Tese de Doutoramento, FEUP, Dezembro de 1995.

CEB-FIP - Externally bonded FRP reinforcement for RC structures. Technical report. Task Group 9.3 FRP reinforcement for concrete structures, 2001, 130 p.

Conseza, E., Manfredi, G., Realfonzo, R., “Analytical modelling of bond between FRP reinforcing bars and concrete”, Non-metallic (FRP) Reinforcement for Concrete Structures, RILEM, 1995.

Cosenza, E., Manfredi, G., and Realfonzo, R., “Behavior and modeling of bond of FRP rebars to concrete.”, Journal of Composites for Construction, ASCE, 1(2), 40–51, 1997.

Cruz, J. S., Barros, J. A. O., “Caracterização experimental da ligação de laminados de CFRP inseridos no betão de recobrimento”, Relatório técnico 02-DEC/E-15, Departamento de Engenharia Civil, Universidade do Minho, Setembro, 54 pp, 2002.

Cruz, J.M.S., Barros, J.A.O., “Bond behavior of carbon laminate strips into concrete by pullout-bending tests”, Bond in Concrete – from the research to standards, International Symposium, 20 a 22 de Novembro, Budapest, Hungria, pp. 614-621, 2002.

De Lorenzis, L., Rizzo, A., La Tegola, A., “A modified pull-out test for bond of near-surface mounted FRP rods in concrete”, Composites: Part B, Elsevier, 2003 (em fase de publicação).

Eligehausen, R., Popov, E. P., and Bertero, V. V., “Local bond stress-slip relationships of deformed bars under generalized excitations.”, Report N° 83/23, Envir. Engrg. Res. Council, University of California, Berkeley, California, 1983.

Focacci, F., Nanni, A., Bakis, C.E., “Local bond-slip relationship for FRP reinforcement in concrete”, Journal of Composites for Construction, ASCE, Vol. 4, N°1, pp. 24\_31, February, 2000.

Kreyszig, E., “Advanced engineering mathematics”, 7<sup>th</sup> edition, John Wiley & Sons, 1993.

Larralde, J., and Silva-Rodriguez, R., “Bond and slip of FRP rebars in concrete.”, Journal of Materials in Civil Engineering, ASCE, 5(1), 30–40, 1993.

Malvar, L. J., “Tensile and bond properties of GFRP reinforcing bars.”, ACI Mat. J., 92(3), 276–298, 1995.

Malvar, L. J., “Tensile and bond properties of GFRP reinforcing bars.”, ACI Mat. J., 92(3), 276–298, 1995.